

Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. Электричка Москва–Петушки проходит начальный путь — от Курского вокзала до Дрезны — втрое дольше, чем от Леоново до Петушков. При этом от Дрезны до Петушков она идёт вдвое быстрее, чем от Курского вокзала до Леоново. Во сколько раз время пути от Курского вокзала до Петушков больше, чем от Дрезны до Леоново?

(South Africa 2014)

2. Для каких натуральных n найдутся целые x, y, z такие, что

$$x + y + z = 0, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n} ?$$

(IberoAmerican 2011)

3. Найдите все совершенные числа, в разложение которых на простые множители каждое простое входит в нечетной степени. Напомним, что натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших самого числа — например, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

(IMC 2014)

4. Для натуральных чисел n, k докажите неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{nk} < \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}.$$

(олимпиада матмеха 2014)

Старшая лига

1. Решите неравенство

$$20 - 14(20 - 14(20 - \dots - 14(20 - 14x) \dots)) > x.$$

Здесь 2014 пар скобок.

(Соросовская олимпиада 1995)

2. Пусть $R(n)$ — количество представлений натурального числа n в виде суммы $n = a + b$ двух простых чисел (например, $R(3) = 0$, $R(4) = 1$, $R(10) = 3$,

поскольку $10 = 3 + 7 = 5 + 5 = 7 + 3$). Докажите, что если $p < q$ — два последовательных простых числа, то сумма

$$2R(q-2) + 3R(q-3) + 5R(q-5) + \dots + p \cdot R(q-p)$$

кратна q .

(None)

3. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что $f(n+1) > \frac{f(n)+f(f(n))}{2}$ при всех натуральных n .

(Iran 2014)

4. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — состоящая из натуральных чисел арифметическая прогрессия, причем x_1 и x_2 взаимно просты. Предположим, что произведение членов этой прогрессии имеет ровно m различных простых делителей, причем $m < n$. Докажите, что $x_1^{n-m} \leq (n-1)!$.

(Erdos)